Université d'Orléans

ECOLE SUPERIEURE DE L'ENERGIE ET DES MATERIAUX

EPREUVES D'ADMISSION 1987 - Option Spé C

MATHEMATIQUES (Durée 4 h - Coefficient 4)

Le soin apporté aux calculs à effectuer, ainsi que la rigueur du raisonnement seront des éléments très importants d'appréciation.

Dans tout le problème, on note :

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}.$$

On rappelle d'autre part que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 1$.

PREMIERE PARTIE

1°) Pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $J_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{n+\frac{1}{2}}}\,du$

a) Montrer l'existence de $J_k(a)$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $a > 0$.

b) Obtenir une relation entre $J_{k+1}(a)$ et $J_k(a)$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $a > 0$.

c) En déduire une expression de $J_0(a)$ en fonction de $J_{n+1}(a)$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{a \to +\infty} \left[a^{n+\frac{1}{2}} . e^a . J_{n+1}(a)\right] = 0$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

En utilisant ce qui précède, prouver l'existence et l'unicité d'un polynome réel P_n, de degré $(2n+1)$, que l'on précisera tel que si

$$\varepsilon_n(x) = \left[\left(1 - \Phi(x)\right) e^{\frac{x^2}{2}} - P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right] . x^{2n+1} \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^*$$

alors $\lim_{x \to +\infty} \varepsilon_n(x) = 0$

C'est-à-dire qu'on a le développement asymptotique suivant :

$$1 - \Phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\varepsilon_n(x)}{x^{2n+1}}\right].$$

3°) a) Prouver que pour $x > 0$, on a :

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}} . \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) < 1 - \Phi(x) < \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}} .$$

b) Donner une valeur approchée de $\Phi(3)$ à 10^{-4} près.

4°) a) Prouver que pour $x > 0$, on a aussi : $\Phi(x) \geqslant 1 - \frac{1}{2x^2}$.

(pour cela on pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

b) L'inégalité précédente, pour $x = 3$, vous paraît-elle satisfaisante par rapport au résultat obtenu en I.3.b ?

5°) a) Montrer que $\theta : x \longmapsto e^{\frac{x^2}{2}} [1 - \Phi(x)]$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et préciser son développement.

b) Déterminer toutes les solutions, $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables, de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y'(x) - x\,y(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} .$$

DEUXIEME PARTIE

1°) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^5.

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}[f'(a) + f'(b)] + \frac{(b-a)^2}{12}[f''(a) - f''(b)] + \frac{(b-a)^5}{720} . f^{(5)}(c)$$

2°) Soit $g : [u,v] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^4.

Montrer qu'il existe $c \in [u,v]$ tel que

$$\int_u^v g(t)\,dt = \frac{v-u}{2}[g(v) + g(u)] - \frac{(v-u)^2}{12}[g'(v) - g'(u)] + \frac{(v-u)^5}{720} . g^{(4)}(c).$$

Tournez la page S. V. P.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE de l'ENERGIE et des MATERIAUX d'ORLEANS

3°) Que peut-on dire de l'application $F : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(P) = \int_0^1 P(t)\,dt - \left[\frac{P(1)+P(0)}{2}\right] + \left[\frac{P'(1)-P'(0)}{12}\right] \quad ?$$

4°) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^4.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose :

$$H_n = \frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{h(a)+h(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right] - \frac{(b-a)^2}{12n^2} \cdot \left[h'(b)-h'(a)\right].$$

Montrer que si M est une constante positive telle que pour tout

$$t \in [a,b],\ |h^{(4)}(t)| \leqslant M$$

alors : $$\left| \int_a^b h(t)\,dt - H_n \right| \leqslant \frac{M\,(b-a)^5}{720.n^4}.$$

5°) Utiliser ce qui précède pour obtenir une valeur approchée de $\Phi(1)$ avec une précision que l'on donnera, en prenant $n = 5$, $a = 0$, $b = 1$ et $h = \varphi$.

On détaillera les calculs en précisant notamment la valeur de M déterminée.

TROISIEME PARTIE

1°) Soit T une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

On définit la variable aléatoire $X = [T]$: "partie entière de T" ainsi :

pour $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$, tel que : $k \leqslant T(\omega) < k+1$.

a) Déterminer la loi de X (en fonction de Φ ou φ).

Quelle relation y-a-t-il entre $P(X = -k)$ et $P(X = k-1)$ pour $k \in \mathbb{Z}$?

b) Montrer que X admet une espérance E(X), et la calculer.

2°) Soit $Y = T - X$.

a) Préciser la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de Φ, en montrant notamment que pour $y \in [0,1]$, on a :

$$F_Y(y) = \Phi(y) - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [\Phi(k+y) - \Phi(k-y)].$$

b) Montrer que pour tout $y \in [0,1[$ fixé, la série de terme général :

$$u_k = \varphi(y+k) + \varphi(y-k) \qquad (k \in \mathbb{N}^*)$$

est convergente.

c) On note $\psi(y) = \varphi(y) + \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi(k+y) + \varphi(k-y)]$ pour $y \in [0,1[$ et

$$\psi_n(y) = \varphi(y) + \sum_{k=1}^{n} [\varphi(k+y) + \varphi(k-y)] \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que pour tout $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$|\psi(t) - \psi_n(t)| \leqslant R_n \quad \text{avec} \quad R_n = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2}}.$$

En déduire que pour tout $y \in [0,1[$ on a $F_Y(y) = \int_0^y \psi(t)\,dt$.

Quelle conclusion en tirez-vous ?

3°) Déterminer E(Y) si elle existe.

4°) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Pour cela on pourra considérer, par exemple, $P\left([X = 0] \cap [Y < \frac{1}{2}]\right)$ pour conclure ; on donne $\Phi(\frac{1}{2}) = 0{,}69$ (ou plus précisément 0,69146...) et on utilisera la valeur approchée de $\Phi(1)$ trouvée en II.5.

5°) Montrer l'existence de V(X), variance de X ; et exprimer V(X) en fonction de : $\sum_{k=1}^{\infty} k(1 - \Phi(k))$

(série dont on précisera la convergence).

6°) Montrer l'existence de V(Y).